Уравнения

Общие сведения об уравнениях

Два выражения, числовые или буквенные, соединенные знаком равенства (=), образуют **равенство** (числовое или буквенное).

Всякое верное числовое равенство, а также всякое буквенное равенство, справедливое при всех числовых значениях входящих в него букв, называется **тождеством**.

Равенство, содержащее неизвестные буквенные величины и не являющееся тождеством, называется **уравнением**. Уравнение называется **буквенным**, если все или некоторые известные величины, входящие в него, выражены буквами; в противном случае уравнение называется **числовым**.

Какие из букв, входящие в уравнение, представляют известные, а какие — неизвестные величины, должно быть отдельно указано. Обычно неизвестные величины обозначаются последними буквами латинского алфавита x, y, z, u, v, w. По числу неизвестных уравнения разделяются на уравнения с одним; двумя, тремя и т. д. неизвестными.

Решить числовое уравнение — значит найти все такие числовые значения входящих в него неизвестных, которые обращают уравнение в тождество. Эти значения называются **корнями уравнения**.

Решить буквенное уравнение — значит найти все такие выражения неизвестных через входящие в уравнения известные величины, которые, будучи подставлены в уравнение вместо соответствующих неизвестных, обращают уравнение в тождество. Найденные выражения называют **корнями уравнения**.

Линейные уравнения

Пример 1.

Показать, что уравнение

$$2(x-1)+1=3-(1-2x)$$

не имеет корней.

Решение.

Данное уравнение равносильно уравнению

$$2x - 2x = 2 + 1$$

или

$$0 \cdot x = 3.$$

Это уравнение не имеет корней, так как левая часть $0 \cdot x$ равна нулю при любом x, а значит, не равна 3.

Пример 2.

Решить уравнение

$$ax = a.$$

Решение.

Это уравнение содержит параметр a (переменную, которая в условии данной задачи сохраняет одно и то же значение).

Если $a \neq 0$, то $ax = a \Leftrightarrow x = \frac{a}{a}$, т.е. $x = 1$ – единственный корень уравнения. Если $a = 0$, то уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$ и его корнем является любое действительное число x.

Пример 3.

Решить уравнение

$$a^2 x = a(x + 2) - 2.$$

Решение.

Перенося члены с неизвестными в одну часть уравнения, а известные члены – в другую, получаем равносильное уравнение

$$a(a - 1)\, x = 2(a - 1).$$

Если $a(a-1) \neq 0$, т.е. $a \neq 0$, $a \neq 1$, то имеем уравнение первой степени, и $x = \frac{2}{a}$ – единственный корень.

Если $a = 0$, то данное линейное уравнение принимает вид $0 \cdot x = -2$ и, значит, не имеет корней.

Если $a = 1$, то уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$ и его корнем является любое число.

Квадратные уравнения

Пример 4.

Решить уравнение

$$x^2 - 12x - 28 = 0.$$

Решение.

$$D = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-28) = 144 + 112 = 256.$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{12 \pm \sqrt{256}}{2} = \frac{12 \pm 16}{2} = 6 \pm 8.$$

$$x_1 = 6 + 8 = 14.$$

$$x_2 = 6 - 8 = -2.$$

Ответ: $x_1 = 14, x_2 = -2$.

Пример 5.

Решить уравнение

$$3x^2 - 7x + 4 = 0.$$

Решение.

$$a = 3, \qquad b = -7, \qquad c = 4.$$

$$D = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 49 - 48 = 1.$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{7 \pm 1}{6}.$$

$$x_1 = \frac{7+1}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

$$x_2 = \frac{7-1}{6} = 1.$$

Ответ: $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = 1$.

Уравнения высших степеней

Пример 6.

Решить уравнение

$$x^3 - x^2 - 21x + 45 = 0.$$

Решение.

Целые корни ищем среди чисел ± 1; ± 3; ± 5; ± 9; ± 15; ± 45. Проверяя эти числа, находим корень $x_1 = 3$. Делим многочлен $x^3 - x^2 - 21x + 45$ на $x - 3$, в частном получим многочлен $x^2 + 2x - 15$. Затем решаем уравнение $x^2 + 2x - 15 = 0$.

$$a = 1, \qquad b = 2, \qquad c = -15.$$

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 4 + 60 = 64.$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} = -1 \pm 4.$$

$$x_1 = -1 + 4 = 3.$$

$$x_2 = -1 - 4 = -5.$$

Имеем два корня: $x = 3$, $x = -5$.

Ответ: $x \in \{3;\ -5\}$.

Пример 7.

Решить уравнение

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = 0.$$

Решение.

Целые корни ищем среди чисел $\pm 1;\ \pm 2$. Проверяя эти числа, получаем $x = -1$. Делим многочлен $x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ на $x + 1$, имеем $x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = (x + 1)(x^2 + 2x + 2)$. Затем решаем уравнение $x^2 + 2x + 2 = 0$.

$$a = 1, \qquad b = 2, \qquad c = 2.$$

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4 < 0.$$

Так как дискриминант отрицателен, то это уравнение не имеет действительных корней.

Ответ: $x \in \{-1\}$.

Иррациональные уравнения

При решении уравнений, содержащих корни чётных степеней, предварительно находим область определения.

Пример 8.

Решить уравнение

$$\sqrt{x + 1} - \sqrt{9 - 2x} = \sqrt{2x - 12}\,.$$

Решение.

Решая систему неравенств

$$\begin{cases} x+1 \ge 0, \\ 9-2x \ge 0, \\ 2x-12 \ge 0, \end{cases}$$

находим область определения: $x \in \emptyset$.

Ответ: уравнение решений не имеет.

Пример 9.

Решить уравнение

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12}\,.$$

Решение.

Решая систему неравенств

$$\begin{cases} x+1 \ge 0, \\ 9-x \ge 0, \\ 2x-12 \ge 0, \end{cases}$$

находим область определения: $x \in [6;\ 9]$. Затем возводим в квадрат обе части уравнения:

$$\left((x+1) - 2\sqrt{x+1}\,\sqrt{9-x} + (9-x) = 2x-12\right) \Leftrightarrow \left(10 - 2\sqrt{x+1}\,\sqrt{9-x} = 2x-12\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(-2\sqrt{x+1}\,\sqrt{9-x} = 2x-22\right) \Leftrightarrow \left(2\sqrt{(x+1)(9-x)} = 22-2x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x+1)(9-x)} = 11-x\right) \Leftrightarrow \left((x+1)(9-x) = (11-x)^2\right) \Rightarrow$$

$$9x - x^2 + 9 - x = 121 - 22x + x^2$$

$$x^2 - 15x + 56 = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8 \\ x = 7 \end{array}\right..$$

Проверкой убеждаемся, что оба корня являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $x \in \{7;\ 8\}$.

Уравнения с модулями

Для решения уравнений с модулями применяется метод промежутков.

Пример 10.

Решить уравнение

$$|x-2|+|x-3|+|2x-8|=9.$$

Решение.

Рассмотрим уравнение в следующих промежутках:

1) $x \le 2$. Тогда

$$|x-2|=-(x-2), |x-3|=-(x-3), |2x-8|=-(2x-8)$$

и, следовательно,

$$(x-2+x-3+2x-8=-9) \Leftrightarrow (4x=4) \Leftrightarrow (x=1)$$

(найденное значение x удовлетворяет условию $x \le 2$ и является корнем уравнения);

2) $2 < x \le 3$. Тогда после аналогичных преобразований получим $x=0$ (этот корень вне данного промежутка);

3) $3 < x \le 4$. Тогда уравнение принимает вид

$$x-2+x-3-2x+8=9,$$

т.е. $x \in \emptyset$;

4) $x > 4$. Имеем $(4x=22) \Leftrightarrow (x=5{,}5)$.

Ответ: $x \in \{1;\ 5{,}5\}$.

Литература

- Математика для подготовительных курсов техникумов. Г.И. Богатырев. Москва «Наука» 1988.
- Справочник по элементарной математике. М.Я. Выгодский. Москва «Наука» 1986.
- Элементарная математика. Решение задач. В.М. Алексеев. Киев «Вища школа» 1984.