

Алгебраические преобразования

В процессе преобразования алгебраических выражений переходим от одного алгебраического выражения к другому, более простому или удобному. Такой переход производим с помощью тождественных преобразований. Отметим, что при упрощении алгебраических выражений наиболее распространенными способами являются: вынесение общего множителя за скобки, разложение на множители.

Пример 1.

Упростить

$$A = \frac{(x^2 - y^2)(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})}{\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{x^2y^3} - \sqrt[3]{x^3y^2} + \sqrt[3]{y^5}} - (\sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}).$$

Решение.

Для упрощения этого выражения разложим на множители знаменатель дроби. Для этого сгруппируем слагаемые и вынесем за скобки общие множители, записывая корни как степени с дробными показателями:

$$\left(x^{\frac{5}{3}} + x^{\frac{2}{3}}y\right) - \left(xy^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{5}{3}}\right) = x^{\frac{2}{3}}(x + y) - y^{\frac{2}{3}}(x + y) = (x + y)\left(x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right).$$

Сделав преобразования и в числителе дроби, будем иметь

$$A = \frac{(x - y)(x + y)\left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)}{(x + y)\left(x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)} - \left((xy)^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{(x - y)\left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)}{x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}} - \left((xy)^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right).$$

Выражение $x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}$ запишем как разность квадратов:

$$x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} = \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right),$$

а $x - y$ как разность кубов:

$$x - y = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(y^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}} + (xy)^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right).$$

Подставляя в A , получим

$$A = \frac{\left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}} + (xy)^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)}{\left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)} - \left((xy)^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right) =$$

$$= x^{\frac{2}{3}} + (xy)^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - (xy)^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}}, x \neq \pm y.$$

Ответ: $A = x^{\frac{2}{3}}$ при $x \neq \pm y$.

Пример 2.

Упростить

$$A = \frac{b^{-\frac{1}{6}} \sqrt{a^3 b} \sqrt[3]{a^3 b} - \sqrt[3]{b^2} \sqrt{a^3 b^2}}{(2a^2 - ab - b^2) \sqrt[6]{a^9 b^4}} \div \left(\frac{3a^3}{2a^2 - ab - b^2} - \frac{ab}{a - b} \right).$$

Решение.

Очевидные ограничения: $a > 0, b > 0, a \neq b$. Преобразуем сначала первую дробь, записывая все корни как степени с дробными показателями:

$$\frac{b^{-\frac{1}{6}} a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{2}} a b^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{2}{3}} a^{\frac{3}{2}} b}{(2a^2 - ab - b^2) a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{2}{3}}} = \frac{b^{\frac{2}{3}} a^{\frac{3}{2}} (a - b)}{(2a^2 - ab - b^2) a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{2}{3}}} = \frac{a - b}{2a^2 - ab - b^2}.$$

Знаменатель полученной дроби раскладываем на множители:

$$2a^2 - ab - b^2 = a^2 + a^2 - ab - b^2 = (a^2 - b^2) + (a^2 - ab) = (a - b)(a + b) + a(a - b) =$$

$$= (a - b)(2a - b).$$

Тогда

$$\frac{a - b}{2a^2 - ab - b^2} = \frac{a - b}{(a - b)(2a - b)} = \frac{1}{2a - b}.$$

Теперь преобразуем выражение в круглых скобках:

$$\begin{aligned} \frac{3a^3}{(2a+b)(a-b)} - \frac{ab}{a-b} &= \frac{3a^3 - ab(2a+b)}{(2a+b)(a-b)} = \frac{a(3a^2 - 2ab - b^2)}{(2a+b)(a-b)} = \\ &= \frac{a(3a+b)(a-b)}{(2a+b)(a-b)} = \frac{a(3a+b)}{2a+b}. \end{aligned}$$

Подставляя в A , находим

$$A = \frac{1}{2a+b} \div \frac{a(3a+b)}{(2a+b)} = \frac{1}{2a+b} \cdot \frac{2a+b}{a(3a+b)} = \frac{1}{a(3a+b)}.$$

Ответ: $A = \frac{1}{a(3a+b)}$ при $a > 0, b > 0, a \neq b$.

Пример 3.

Упростить

$$A = \frac{x^2 + 2x - 3 + (x+1)\sqrt{x^2-9}}{x^2 - 2x - 3 + (x-1)\sqrt{x^2-9}}$$

Решение.

Находим ограничения:

$$(x^2 - 9 > 0) \Rightarrow \begin{cases} x > 3, \\ x < -3. \end{cases}$$

Рассмотрим отдельно эти случаи:

1) если $x > 3$, то

$$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1); \quad x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1);$$

$$x+3 = (\sqrt{x+3})^2; \quad (\sqrt{x-3})^2 = x-3.$$

Подставляя в A , находим

$$A = \frac{(x+3)(x-1) + (x+1)\sqrt{x^2-9}}{(x-3)(x+1) + (x-1)\sqrt{x^2-9}} = \frac{(\sqrt{x+3})^2(x-1) + (x+1)\sqrt{(x+3)(x-3)}}{(\sqrt{x-3})^2(x+1) + (x-1)\sqrt{(x+3)(x-3)}}.$$

В числителе выносим за скобки общий множитель $\sqrt{x+3}$, а в знаменателе $\sqrt{x-3}$. Тогда получим

$$\frac{\sqrt{x+3}(\sqrt{x+3}(x-1) + (x+1)\sqrt{x-3})}{\sqrt{x-3}(\sqrt{x-3}(x+1) + (x-1)\sqrt{x+3})} = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}};$$

2) если $x < -3$, то $x+3 < 0$, $x-3 < 0$. Поэтому

$$x+3 = -|x+3| = -(\sqrt{|x+3|})^2,$$

$$x-3 = -|x-3| = -(\sqrt{|x-3|})^2.$$

Применяя

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{|a|} \sqrt[n]{|b|},$$

находим

$$\sqrt{(x+3)(x-3)} = \sqrt{|x+3|} \sqrt{|x-3|}.$$

Подставляя в A и выполнив преобразования, получим

$$\begin{aligned} A &= \frac{-(\sqrt{|x+3|})^2(x-1) + (x+1)\sqrt{|x+3|}\sqrt{|x-3|}}{-(\sqrt{|x-3|})^2(x+1) + (x-1)\sqrt{|x+3|}\sqrt{|x-3|}} = \\ &= \frac{-\sqrt{|x+3|}((x-1)\sqrt{|x+3|} - (x+1)\sqrt{|x-3|})}{\sqrt{|x-3|}((x-1)\sqrt{|x+3|} - (x+1)\sqrt{|x-3|})} = -\frac{\sqrt{|x+3|}}{\sqrt{|x-3|}} = -\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } A = \begin{cases} \sqrt{\frac{x+3}{x-3}} & \text{при } x > 3, \\ -\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} & \text{при } x < -3. \end{cases}$$

Пример 4.

Упростить

$$A = (2\sqrt{a} - \sqrt[4]{b})^2 \div \left(\frac{a^2 - 7a\sqrt{b} + 9b}{a - 3\sqrt{b} + \sqrt[4]{a^2b}} + \frac{13\sqrt{b}}{4} \right).$$

Решение.

Очевидные ограничения: $a > 0$, $b > 0$. Сначала преобразуем выражение, стоящее во вторых скобках:

$$\begin{aligned} \frac{a^2 - 7a\sqrt{b} + 9b}{a - 3\sqrt{b} + \sqrt[4]{a^2b}} + \frac{13\sqrt{b}}{4} &= \frac{(a^2 + 9b - 6a\sqrt{b}) + 6a\sqrt{b} - 7a\sqrt{b} + 13\sqrt{b}}{a - 3\sqrt{b} + \sqrt{a}\sqrt[4]{b}} = \\ &= \frac{(a - 3\sqrt{b})^2 - a\sqrt{b} + 13\sqrt{b}}{a - 3\sqrt{b} + \sqrt{a}\sqrt[4]{b}} + \frac{13\sqrt{b}}{4} = \frac{(a - 3\sqrt{b})^2 - (\sqrt{a}\sqrt[4]{b})^2}{a - 3\sqrt{b} + \sqrt{a}\sqrt[4]{b}} + \frac{13\sqrt{b}}{4} = \\ &= a - 3\sqrt{b} - \sqrt{a}\sqrt[4]{b} + \frac{13\sqrt{b}}{4} = \\ &= \frac{1}{4}(4a - 4\sqrt{a}\sqrt[4]{b} + \sqrt{b}) = \frac{1}{4}(2\sqrt{a} - \sqrt[4]{b})^2. \end{aligned}$$

Подставляя в A , находим

$$A = (2\sqrt{a} - \sqrt[4]{b})^2 \div \frac{(2\sqrt{a} - \sqrt[4]{b})^2}{4} = 4.$$

Ответ: $A = 4$ при $2\sqrt{a} \neq \sqrt[4]{b}$, $a - 3\sqrt{b} + \sqrt{a}\sqrt[4]{b} \neq 0$, $a > 0$, $b > 0$.

Пример 5.

Упростить

$$\left(\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}} - t^3 + \sqrt[3]{\frac{t^5 + 2t^4 + 4t^3}{4 - 4t + t^2}} \right) \div \left(\frac{1}{\sqrt{t} - \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{2}} \right).$$

Решение.

Очевидные ограничения: $t \geq 0$, $t \neq 2$.

Выполняем преобразования:

$$\left(\sqrt[3]{8 - t^3} + \sqrt[3]{\frac{t^3(t^2 + 2t + 4)}{(t - 2)^2}} \right) \div \frac{2\sqrt{2}}{t - 2} = \left(\sqrt[3]{8 - t^3} + \frac{t \sqrt[3]{(t^2 + 2t + 4)(2 - t)}}{\sqrt[3]{(2 - t)^3}} \right) \div \frac{2\sqrt{2}}{t - 2} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\sqrt[3]{8-t^3} + \frac{t\sqrt[3]{8-t^3}}{2-t} \right) \div \frac{2\sqrt{2}}{t-2} = \sqrt[3]{8-t^3} \cdot \frac{2}{2-t} \div \frac{2\sqrt{2}}{t-2} = \sqrt[3]{8-t^3} \cdot \frac{2}{2-t} \cdot \frac{t-2}{2\sqrt{2}} = \\
 &= -\sqrt[3]{8-t^3} \cdot \frac{2}{t-2} \cdot \frac{t-2}{2\sqrt{2}} = -\sqrt[3]{8-t^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[3]{t^3-8}}{\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{\sqrt[3]{t^3-8}}{\sqrt{2}}$ при $t \geq 0, t \neq 2$.

Пример 6.

Упростить

$$\frac{x^{-6} - 64}{4 + 2x^{-1} + x^{-2}} \cdot \frac{x^2}{4 - 4x^{-1} + x^{-2}} - \frac{4x^2(2x + 1)}{1 - 2x}.$$

Решение.

Находим область определения: $x \neq 0$; $(1 - 2x \neq 0) \Leftrightarrow (x \neq \frac{1}{2})$. Раскладываем выражение $x^{-6} - 64$ как разность квадратов:

$$x^{-6} - 64 = (x^{-3} - 8)(x^{-3} + 8),$$

затем выражение $x^{-3} - 8$ раскладываем как разность кубов и, выполнив действие умножения, получаем

$$\frac{(x^{-1} - 2)(x^{-2} + 2x^{-1} + 4)(x^{-3} + 8)x^2}{(4 + 2x^{-1} + x^{-2})(x^{-1} - 2)^2} = \frac{\left(\frac{1}{x^3} + 8\right)x^2}{\frac{1}{x} - 2} = \frac{1 + 8x^3}{1 - 2x}.$$

Окончательно имеем

$$\frac{1 + 8x^3}{1 - 2x} - \frac{4x^2(2x + 1)}{1 - 2x} = \frac{1 + 8x^3 - 8x^3 - 4x^2}{1 - 2x} = \frac{1 - 4x^2}{1 - 2x} = \frac{(1 - 2x)(1 + 2x)}{1 - 2x} = 1 + 2x.$$

Ответ: $1 + 2x$ при $x \neq 0, x \neq \frac{1}{2}$.

Пример 7.

Упростить

$$\sqrt[3]{x + \sqrt{2 - x^2}} \sqrt[6]{1 - x\sqrt{2 - x^2}}$$

при $|x| \leq 1$.

Решение.

Представим $\sqrt[3]{x + \sqrt{2 - x^2}}$ в виде

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x + \sqrt{2 - x^2}} &= \sqrt[6]{(x + \sqrt{2 - x^2})^2} = \sqrt[6]{x^2 + 2x\sqrt{2 - x^2} + (2 - x^2)} = \\ &= \sqrt[6]{2 + 2x\sqrt{2 - x^2}} = \sqrt[6]{2(1 + x\sqrt{2 - x^2})}.\end{aligned}$$

Тогда данное выражение примет вид

$$\begin{aligned}\sqrt[6]{2(1 + x\sqrt{2 - x^2})(1 - x\sqrt{2 - x^2})} &= \sqrt[6]{2(1 - x^2(2 - x^2))} = \sqrt[6]{2(1 - 2x^2 + x^4)} = \\ &= \sqrt[6]{2(1 - x^2)^2} = \sqrt[6]{2} \sqrt[6]{(1 - x^2)^2} = \sqrt[6]{2} \sqrt[3]{1 - x^2}.\end{aligned}$$

Таким образом, при решении данного примера мы сначала привели корни к одному показателю, а затем выполнили преобразования.

Ответ: $\sqrt[6]{2} \sqrt[3]{1 - x^2}$.

Пример 8.

Упростить

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}} \sqrt[4]{7 - 4\sqrt{3}}.$$

Решение.

Имеем

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt[4]{(2 + \sqrt{3})^2} = \sqrt[4]{4 + 4\sqrt{3} + 3} = \sqrt[4]{7 + 4\sqrt{3}}$$

и окончательно

$$\sqrt[4]{7 + 4\sqrt{3}} \sqrt[4]{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt[4]{49 - (4\sqrt{3})^2} = \sqrt[4]{49 - 48} = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 9.

Упростить

$$\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}.$$

Решение.

Преобразуем подкоренное выражение (выделение полного квадрата под радикалом)

$$5 - 2\sqrt{6} = 5 - 2\sqrt{3}\sqrt{2} = 3 + 2 - 2\sqrt{3}\sqrt{2} = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{2} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2.$$

Окончательно имеем

$$\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

Ответ: $\sqrt{3} - \sqrt{2}$.

Пример 10.

Упростить

$$\sqrt{7 - 2\sqrt{6}}.$$

Решение.

Преобразуем подкоренное выражение

$$7 - 2\sqrt{6} = 7 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{6} = 6 + 1 - 2\sqrt{6} = (\sqrt{6} - 1)^2$$

и получим

$$\sqrt{7 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{6} - 1)^2} = \sqrt{6} - 1.$$

Ответ: $\sqrt{6} - 1$.